

粘性流領域における真空排気の理論計算とその応用

千田 裕彦

Theoretical Analysis of Vacuum Evacuation in Viscous Flow and Its Applications — by Yasuhiko Senda — The vacuum is classified into three categories depending on the state of gas: viscous, intermediate, and molecular flows. The viscous flow evacuation is generally regarded as a basic technique, with which pressure decreases along with the exponential curve of time. However, this is not always the case when the conductance of the pipe is considered. To begin with, the author theoretically solved the evacuation equation in the viscous flow. In addition, he introduced the notion of “transferring pressure Π ,” calculated as S_0/C_c ; S_0 refers to the pumping speed, while C_c refers to the ratio of the conductance of the pipe to the pressure.

By examining the two extreme cases, the author has revealed a new fact: (a) when pressure $\gg \Pi$, the evacuation curve is exponential as generally stated; whereas (b) when pressure $\ll \Pi$, the curve is not exponential but inversely proportional to time. In this paper, the author describes the details of his study and the applications of case (b).

Keywords: vacuum, viscous flow, Knudsen number, conductance, evacuation time

1. 緒言

真空とは、JIS Z 8126（真空用語）によると、「通常の大気圧より低い圧力の気体で満たされた空間の状態」と定義され、その圧力に応じて、産業上の様々な分野で利用されている（表1）。

出した。また、「分岐圧力」という概念を創出して、①②を含む一般の粘性流領域における排気曲線が、総合的に説明できることを示した。特に、通常触れられることのない②の結果は簡潔でかつ興味深いものである。最後に、その応用や留意点についても述べる。

表1 圧力別に見た、真空技術の応用例

応用分野	圧力例 (Pa)	利用される物理現象
真空吸着	$10^5 \sim 10^4$	大気との圧力差を利用
真空蒸留	$10^4 \sim 10^3$	沸点の低下を利用
真空置換	$10^1 \sim 10^{-3}$	残留不純物の低下
真空蒸着	$10^{-2} \sim 10^{-7}$	気体分子の平均自由行程の増大を利用
分子線エビタキシー	$10^{-7} \sim 10^{-9}$	残留分子の入射頻度の低下を利用し、成膜の純度を向上させる。

表1を見て分かるように、対象となる圧力範囲は10の14乗にも渡っており、必要とされる装置構成・仕様、解決すべき課題、ノウハウはそれぞれに異なる。

本論文では、通常の真空技術の教科書では「簡単なもの」として触れられることの殆どない「粘性流領域の真空排気速度の理論解析」を実施して厳密な一般解を導出した。そしてその極限として、①配管抵抗が無視出来る場合、②配管抵抗が律速する場合、の2条件において各々極限式を導

2. 真空の区分

2-1 圧力による区分 JIS Z 8126には圧力範囲による区分が定義されている。

表2 圧力による真空の区分⁽¹⁾

真空の区分	圧力例 (Pa)
低真空	大気～100
中真空	100～0.1
高真空	0.1～ 10^{-5}
超高真空	10^{-5} 以下

これらの区分は、容易に計測でき、直感的に分かり易いものではあるが、実際の物理現象（気体分子の運動状態）を反映したものではなく、現象の解析には不適切である。

2-2 気体の運動状態に着目した区分 真空現象の解析には、気体の運動状態（流れの状態）に着目した区分

が必要である。その境界は実は曖昧であるが通常次の表3のように区分される。

表3 気体の運動状態に着目した区分

区分	細分	分子の運動状態	目安 ⁽³⁾
粘性流	乱流	分子が壁に衝突する頻度より、分子同士の衝突頻度が(圧倒的に)大	$K < 0.01, Re > 2200$
	層流		$K < 0.01, Re < 1200$
中間流		粘性流と分子流との遷移領域	$0.01 < K < 0.3$
分子流		分子同士が衝突する頻度より壁に衝突する頻度が小	$K > 0.3$

K : クヌーゼン数: 粘性流/分子流を示す指数。 $K = \lambda/D$
 λ : 平均自由行程 (m), D : 管径 (m)
 Re : レイノルズ数。乱流/層流を示す指数。 $Re = Dv\rho/\eta$
 D : 管径 (m), v : 流速 (m/s), ρ : 密度 (kg/m³),
 η : 粘性係数 (Pa·s)

これらの区分が重要なのは、実用上大切な「真空排気速度」の計算に必要な「コンダクタンス」という指標が、この区分により大きく変わるからである。本論文は表3の粘性流領域(層流)の状態を解析するものであるが、まずは表3の概要を次に説明する。

3. 真空の基礎

3-1 平均自由行程 気体は多数の分子の集まりで、それぞれが分子の種類と温度で決まる平均速度で自由に飛び回っている(室温で500~1500m/s程度)。分子の数は通常非常に多数(室温で1L当たり2.7E22個)のため、分子同士は互いに衝突を繰り返している。その衝突と衝突の間に飛び距離の平均を「平均自由行程(mean free path)」と呼ぶ。

平均自由行程を λ [m]、圧力P [Pa]、温度T [K]、分子直径d [m]、ボルツマン定数k [J/K] とすると、以下の式が成り立つ⁽³⁾。

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \doteq \frac{3.11 \times 10^{-24} T}{d^2 P} \quad \dots\dots\dots \text{式(1)}$$

ここで、T = 300 [K]、気体分子を窒素とすると、分子直径はd = 0.37 [nm] であるから^{(5),(6)}、

$$\lambda = 6.8 \times 10^{-3} / P \quad \dots\dots\dots \text{式(2)}$$

で表される(大気の場合も殆ど同じである)。

3-2 粘性流と分子流 圧力が高い状態では 図1 (a) のように分子同士の衝突が支配的であるが、式(2)を見ても分かるように圧力を下げていくと平均自由行程は大きくなって、図1 (b) のように分子同士の衝突より分子と

壁の衝突の頻度が大きくなるような状態が生ずる。ここで (a) の状態を「粘性流領域」、(b) の状態を「分子流領域」、と呼んで区別する。

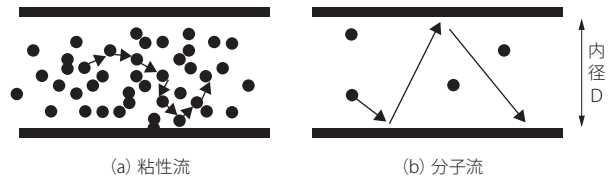


図1

3-3 流れの指標：クヌーゼン数とPD さて、図1を見て分かるように、配管(または容器)の内径をD [m] とすると、 $\lambda \ll D$ のときに粘性流、 $\lambda \geq D$ 程度のときに分子流、となるのが分かる。そこで、 $K = \lambda/D$ なる無次元数を考えると、 $K \ll 1$ で粘性流、 $K \geq 1$ 程度で分子流となる。その中間が中間流領域。このKをクヌーゼン数(Knudsen Number)と呼ぶ。実用的には、 $K < 0.01$ を粘性流、 $K > 0.3$ を分子流領域と考える場合が多い。

また、この関係を式(2)に代入すると、

粘性流: $PD > 0.68 [\text{Pa} \cdot \text{m}]$

分子流: $PD < 0.02$

とも表現できる。現実の設計ではこの表現の方が直感的で分かり易い。

3-4 コンダクタンス 配管の中を気体が流れるとき生ずる抵抗を排気抵抗と呼び、その逆数をコンダクタンスと呼ぶ。図2のような模式図において、配管両端の圧力を P_1, P_0 [Pa] とし、流量をQ [Pam³/s] で表すと、コンダクタンスC [m³/s] として

$$Q = C(P_1 - P_0) \quad \dots\dots\dots \text{式(3)}$$

で表される。

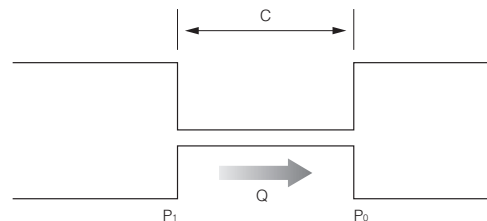


図2: コンダクタンスの模式図

表4 (長い) 配管のコンダクタンス⁽²⁾

	粘性流	分子流
コンダクタンス C [m ³ /s]	$\frac{1349 D^4 P}{L}$	$\frac{121 D^3}{L}$

$P = (P_1 + P_0)/2$ [Pa], D: 配管直径 [m]; L: 配管長さ [m]

粘性流、分子流領域における配管のコンダクタンスは表4のように理論的に求められる。特徴としては

- ・粘性流：平均圧力に比例する。Dの4乗に比例。
- ・分子流：圧力に無関係。Dの3乗に比例する。

中間流に対する値としては、分子流コンダクタンスを1として

$$\frac{1 + 201 \cdot PD + 2647 \cdot (PD)^2}{1 + 236 \cdot PD}$$

という近似式⁽³⁾が提唱されている(図3)。

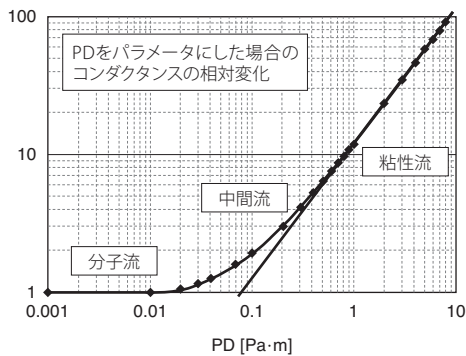


図3 PDを変化させた場合のコンダクタンスの相対変化

これによれば、粘性流の限界はPD≒0.3～0.4程度と考えても十分である。

3-5 排気速度、排気時間(簡略計算) 図4のような簡単な排気システムを考える。容積V[m³]の容器を、配管で接続して、排気速度S[m³/s]の真空ポンプで排気する。通常の教科書等では次のように簡単に考える。粘性流領域では配管のコンダクタンスCはポンプの排気速度Sに比べて十分大きいとして無視するか、または実行排気速度Se=0.8S程度と考えて、非定常状態でのガス収支のバランス式

$$V \cdot \Delta P = -S_e \cdot P \cdot \Delta t \quad \dots\dots\dots \text{式(4)}$$

を積分して

$$\ln(P) = -\frac{S_e}{V} \cdot t + \text{定数} \quad \dots\dots\dots \text{式(5)}$$

を得る。式(5)を初期条件t=0でP=P₀で解いて

$$P = P_0 \cdot \exp(-S_e \cdot t / V) \quad \dots\dots\dots \text{式(6)}$$

$$t = 2.303 \cdot \frac{V}{S_e} \log\left(\frac{P_0}{P}\right) \quad \dots\dots\dots \text{式(7)}$$



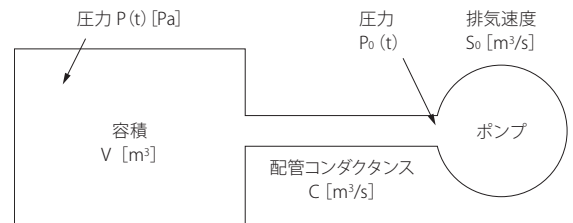
図4 簡単な排気システム

とする。

これら(6),(7)の式は、簡単で物理的意味も明白である。ただし、これには前提に問題がある。すなわち、それは、3-4で記したように、配管コンダクタンスCは実際は平均圧力に比例する、という点である。上記計算ではCは十分大きくて無視できるとするか、または簡単に8掛けとしてあるが、無視できない場合はどうなるのであろうか、一般的な式はないのか、ということである。本論文では、以下にこの一般的な場合の解を考察する。

4. 粘性流領域における排気計算の一般解

4-1 基本式の導出 基本式導出のため、各物理量を図5のように改めて定義する。



$$C = C_c \cdot \{P(t) + P_0(t)\} / 2, \quad C_c: \text{コンダクタンス係数}$$

図5 粘性流領域の排気システム

3-4で述べたように、粘性流領域では配管のコンダクタンスCは平均圧力に比例する。そこで、圧力に比例しない部分をC_c[m³/sPa]と置き、コンダクタンス係数と呼ぶことにする。

表4より、室温大気の場合は、配管径D[m],長さL[m]として

$$C_c = \frac{1349 \cdot D^4}{L}$$

である。図5のようにポンプの排気速度をS₀、ポンプ頭の

圧力を $P_0(t)$ 、容器の圧力を $P(t)$ と、時間の関数とする。
以下の仮定を置く。

- ・ポンプの到達圧力は十分小さく無視できるものとする。
- ・容器は十分大きく、圧力は均一で配管体積は無視できる。
- ・各部のリーク及びガス放出は無視できる。
- ・粘性流領域で考える。

以上の条件の下に、 $t=0$ のとき $P(t) = P_0$ からスタートして、 $P(t)$ を求めることを考える。

配管を流れる流量を $Q(t)$ [$\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s}$] と置くと、式 (3) より、

$$Q(t) = C \cdot (P(t) - P_0(t))$$

$$= \frac{C_c}{2} (P(t)^2 - P_0(t)^2)$$

$$\rightarrow P(t)^2 - P_0(t)^2 = \frac{2}{C_c} \cdot Q(t) \quad \dots\dots\dots \text{式 (8)}$$

である。一方、排気速度の定義より、

$$Q(t) = S_0 \cdot P_0(t) \quad \dots\dots\dots \text{式 (9)}$$

が成立し、容器の時間当たりの圧力降下が流量に等しいという収支バランスから、

$$-V \cdot \frac{dP}{dt} = Q(t) \quad \dots\dots\dots \text{式 (10)}$$

が成立。式 (9) を (8)、(10) に代入して

$$\left\{ P(t)^2 - P_0(t)^2 = \frac{2}{C_c} S_0 P_0(t) \quad \dots\dots\dots \text{式 (11)} \right.$$

$$\left. -V \cdot \frac{dP}{dt} = S_0 P_0(t) \quad \dots\dots\dots \text{式 (12)} \right.$$

式 (11) より、

$$P_0(t) = -\frac{S_0}{C_c} + \sqrt{\left(\frac{S_0}{C_c}\right)^2 + P(t)^2} \quad \dots\dots\dots \text{式 (13)}$$

式 (13) を式 (12) に代入して、

$$\frac{-V}{S_0} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{-S_0}{C_c} + \sqrt{\left(\frac{S_0}{C_c}\right)^2 + P(t)^2} \quad \dots\dots \text{式 (14)}$$

この式 (14) の微分方程式を、初期条件 $t=0$ で $P(t) = P_0$ で解けば良い。

4-2 一般解の導出 幸運なことに式 (14) は解析的に解ける。ここで、

$$P(t) = \frac{S_0}{C_c} \cdot x(t) \quad \dots\dots\dots \text{式 (15)}$$

と置く。式 (14) は式 (15) により、

$$\frac{-V}{S_0} \frac{dx}{dt} = -1 + \sqrt{1+x(t)^2} \quad \dots\dots\dots \text{式 (16)}$$

と成る。ここで、

$$\frac{V}{S_0} = \tau \quad (\text{時定数}) \quad \dots\dots\dots \text{式 (17)}$$

と置くと、

$$-\tau \frac{dx}{dt} = -1 + \sqrt{1+x(t)^2} \quad \dots\dots\dots \text{式 (18)}$$

が得られる。式 (18) を積分形で表現すると、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \int \frac{-dt}{\tau} \quad \dots\dots\dots \text{式 (19)}$$

$$\text{式 (19左辺)} = \int \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x^2} dx$$

ここで公式集⁽⁷⁾より、

$$= \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} \quad \dots\dots \text{式 (20)}$$

$$\text{式 (19右辺)} = \int \frac{-dt}{\tau} = \frac{-t}{\tau} - A \quad (\text{積分定数}) \quad \dots\dots \text{式 (21)}$$

よって、式 (20)、(21) より、

$$\frac{-\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} = \frac{-t}{\tau} - A \quad \dots\dots \text{式 (22)}$$

ただし、

$$P(t) = \frac{S_0}{C_c} x(t)$$

が得られる。この式 (22) を、初期条件 $t=0$ で $P(t) = P_0$ で解く。

$$P_0 = \frac{S_0}{C_c} x_0 \text{ とおくと、}$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 + x_0^2}}{x_0} - \ln(x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}) \dots\dots\dots \text{式 (23)}$$

$$\frac{t}{\tau} = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} - \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - A \dots \text{式 (24)}$$

ただし、

$$P(t) = \frac{S_0}{C_c} x(t), P_0 = \frac{S_0}{C_c} x_0, \tau = \frac{V}{S_0}$$

が一般解である。

4-3 2つの極限

$$\tau = \frac{V}{S_0}$$

は時間の単位 [s] を持ち、 t/τ の形で表れることから、「時定数」に相当すると考えられる。一方

$$\frac{S_0}{C_c}$$

は、圧力 [Pa] の単位を持つことから、何らかの代表的圧力であると考えられる。以降、これを

$$\Pi = \frac{S_0}{C_c}$$

とおいて、「分岐圧力」と呼ぶことにする。こうすると、式 (23), (24) の一般解は、

$$\frac{t}{\tau} = \frac{1 + \sqrt{1 + (P/\Pi)^2}}{(P/\Pi)} - \ln\left(\frac{P}{\Pi} + \sqrt{1 + (P/\Pi)^2}\right) - A$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 + (P_0/\Pi)^2}}{(P_0/\Pi)} - \ln\left(\frac{P_0}{\Pi} + \sqrt{1 + (P_0/\Pi)^2}\right) \dots\dots\dots \text{式 (25)}$$

と表現される (Pは時間tの関数である)。圧力は分岐圧力 Π (パイ) で「正規化」されていると考えられる。

一般に P_0 は大気圧であるから $P_0 \gg \Pi$ 。即ち、

$$A \approx 1 - \ln\left(\frac{2P_0}{\Pi}\right) \dots\dots\dots \text{式 (26)}$$

が多くの場合成り立つ。

ここで以下の2つの場合の極限近似を考える。

【ケース1】 $P \gg \Pi$ なる圧力領域。(式 (26) は自動成立)

$$\frac{t}{\tau} \approx \left\{ 1 - \ln\left(\frac{2P}{\Pi}\right) \right\} - \left\{ 1 - \ln\left(\frac{2P_0}{\Pi}\right) \right\} = \ln\left(\frac{P_0}{P}\right) \dots\dots\dots \text{式 (27)}$$

即ち、
$$P \approx P_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{S_0 \cdot t}{V}\right) \dots \text{式 (28)}$$

【ケース2】 $P \ll \Pi$ なる圧力領域。

$$\frac{t}{\tau} \approx \frac{2}{P/\Pi} - \ln(1) - A \approx \frac{2\Pi}{P} \dots\dots\dots \text{式 (29)}$$

$$\therefore \begin{cases} P_0 \approx \Pi \text{ の時は } A \approx 1 + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \cong 1.53 \\ P_0 \gg \Pi \text{ の時は } \frac{2\Pi}{P} \gg -A \cong \ln\left(\frac{2P_0}{\Pi}\right) - 1 \end{cases}$$

即ち、
$$P \approx \frac{2\Pi \cdot \tau}{t} = \frac{2 \cdot V}{C_c} \cdot \frac{1}{t} \dots\dots\dots \text{式 (30)}$$

4-4 一般解の解釈 前章のケース1、ケース2を解釈してみる。

①普通に分岐圧力 $\Pi = S_0/C_c$ を持つ場合。この場合、大気圧から排気を開始したとすると、最初は圧力Pは時間tの指数関数で減少していく(ケース1)。分岐圧力より十分圧力が低下すると、今度は、初期条件とは無関係に、圧力Pは時間に反比例して低下する(ケース2)。この2つの状態が仮想的に分岐する圧力が分岐圧力 Π であるわけである。

②配管径が十分太くて、分岐圧力が小さく、粘性流領域の下限程度に達している場合。この場合は、ケース2の状態が実際は発現せず、真空排気のほぼ全圧力領域でケース1、即ち圧力が時間の指数関数で低下する。この状態が3-5で述べた、通常真空技術の教科書に記載されている場合である。

③逆に、配管が非常に細くて、分岐圧力が高く、大気圧に近い場合も考えられる。この場合はケース1の状態は発現せず、全領域でケース2、即ち圧力が時間に反比例することになる。このケースでは真空ポンプの排気速度は配管の抵抗でマスクされてしまった状態である。排気時間は容積Vとコンダクタンス係数 C_c だけの関数になり、初期圧力とポンプの排気速度には無関係になる(式30)。

一般の粘性流領域における真空排気では上記①～③全ての状態が現れ得る。教科書に記載されている②の場合が全てではないことに注意する必要がある。特に、①③ではケース2の、「圧力が時間に反比例して低下する」領域があることは極めて特徴的で注目値する。

この状況をグラフにしたのが下記図6である。

条件は：L = 3 [m], V = 10 [L], S₀ = 200 [L/min], P₀ = 1e5 [Pa]である。

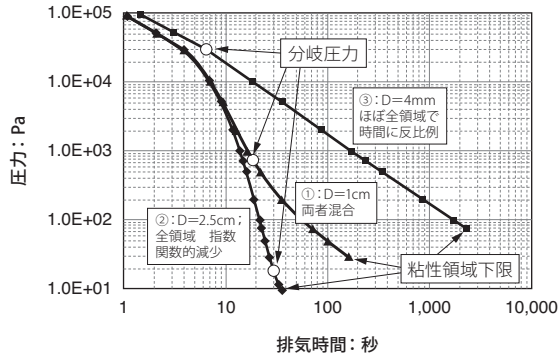


図6 排気曲線の計算例

①、②、③の3つの場合が典型的に描かれている。粘性領域下限はPD = 0.3を採用してある。

4-5 実測例 図7に実測例のグラフを示す。

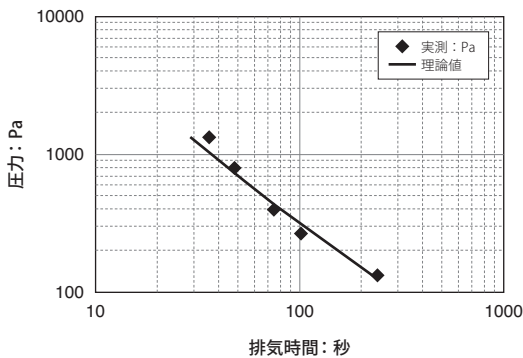


図7 実測例

V = 8.6 [L], S₀ = 180 [L/min], L = 7.5 [m], D = 7.53 [mm] (3/8” チューブ、肉厚1mm), P₀ = 1e5 [Pa] (大気圧) である。

5. 応用と留意点

5-1 応用事例 圧力が時間に反比例するケースは、排気時間が掛かるだけで実用上意味がない、とも思われるが、必ずしもそうでもない。太い配管で容器を大気圧から排気し始めると、実は最初の間は乱流状態が生じて、容器内でゴミが飛散し、問題になることがある。そのような場合は、最初の内だけ、細い配管でスロー排気を行うことが良く行われる(図8)。このとき、どの程度の配管を採用すれば本引きしても層流となる圧力領域にどの程度の時間で到達するのか、本計算を採用すれば判明する。あまりに細い配管を使うと、不必要に時間がかかるので注意せねばならない。場合によってはスロー配管を2系統必要な場合も考えられる。

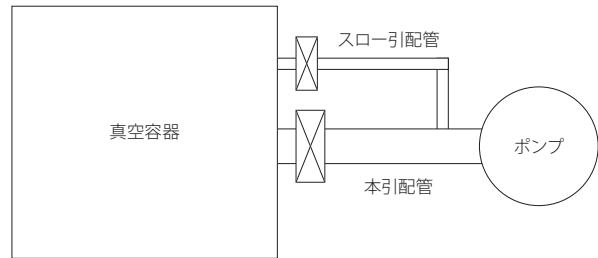


図8 スロー排気の実例

5-2 留意点 図9は図6の①②のグラフを、横軸をリニアにとって片対数で描き直したものである。

曲線①は途中から大きく「寝て」しまっている。教科書に書いてあることだけを信じて、粗びきの排気曲線は片対数グラフで直線であるべき、と思いこむとひどい間違いである。このように寝てしまうと「リークがあるのではないか？」など不要な心配をして、あるはずもないリーク探しを始める、などということのないように留意されたい。勿

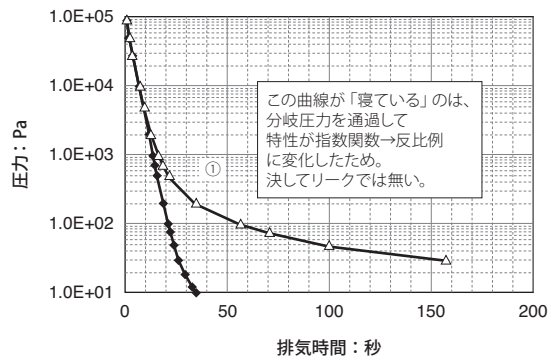


図9 片対数で描いた排気曲線

論、このように排気に長時間かかることは、望ましくもなく、意図したことではない場合も多い。この事例で言えば、「配管径が細すぎる」わけで、「配管のサイズアップが必要」と判断するのが正解である。

6. 結 言

真空の世界では、「比較的簡単」と思われているせいか、粘性流領域の話題は教科書等では非常に少ない。今回、解析してみると、簡単と思われていたことでも意外に深い現象であることが判明した。本論文では、「分岐圧力」という概念を創出することにより、粘性流領域の排気状態が、指数関数領域から時間反比例領域へ遷移することを示した。特に、配管抵抗が支配的な領域では、「圧力が時間に反比例する」という事実は非常に簡潔で、かつ重要な結論であるにもかかわらず、これを明確に指摘した真空技術の教科書を見たことがないのは不思議なくらいである。

今回厳密に導出した一般解はかなり複雑な形をしており、そのままでは直感的理解はし難いものがある。ただし現在ではコンピュータの利用が一般的になっており、表計算ソフトなどを使うと、本一般式で容易にグラフを描いたり、シミュレーションしたりできるので、それなりの意味があると思われる。

本論文が真空技術に関わる人々、真空設備を使用されている方々などの一助になれば幸いである。

参 考 文 献 -----

- (1) JIS Z 8126、「真空用語」、p2 (1990)
- (2) 「真空ハンドブック 増訂版」、pp39-41、日本真空技術(株) (1982)
- (3) 林義孝、「真空技術入門」、pp18-19、p13、p21、日刊工業新聞社 (1987)
- (4) URL <http://www.nucleng.kyoto-u.ac.jp/People/ikuji/edu/vac/app-A/conduct.html>
- (5) URL <http://www.nucleng.kyoto-u.ac.jp/People/ikuji/edu/ebeam/lennard.html>
- (6) URL <http://www.nucleng.kyoto-u.ac.jp/People/ikuji/edu/vac/app-A/mfp.html>
- (7) 大槻義彦訳、「数学大公式集」、pp86-88、丸善 (1983)
- (8) ジョン F. オハンロン、「真空技術マニュアル」、産業図書 (1985)
- (9) 中川勝矢、「真空技術実務読本」、オーム社 (1985)
- (10) 中川洋、「失敗に学ぶ現場のための『真空技術トラブル対策』」、トレンド・ブックス (1982)
- (11) 谷田和雄、「真空システム工学—基礎と応用—」、養賢堂 (1977)

執 筆 者 -----

千田 裕彦：シニアスペシャリスト
生産技術部 設備技術部 主幹
半導体等の設備技術の開発に従事

